DS n°5 : Continuité, dérivabilité, convexité, relations, arithmétique

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ± 1 point.
Les exercices sont de difficulté (plus ou moins) croissante et les premiers exercices rapportent plus de points (à difficulté égale) que les suivants.

Exercice 1 : Un calcul de PGCD

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $A = 2^{8n} - 3^{2n} + 13$ et $B = 2^{4n} - 3^n$.

1) Calculer $B \times (2^{4n} + 3^n)$.

2) Montrer que $A \wedge B$ divise $B \wedge 13$.

3) Justifier brièvement que pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, l'entier $a - b$ divise $a^n - b^n$.

4) En déduire que 13 divise B. Que vaut $A \wedge B$?

Exercice 2 : Une étude de fonction

Soit h la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h(x) = \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.

1) Montrer qu'on peut prolonger h par continuité en -1 et en 1. Préciser les valeurs de $h(1)$ et $h(-1)$.

2) Justifier que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

3) Déterminer, pour tous $\alpha, \beta > 0$, la limite de $\dfrac{1}{(x^2-1)^\alpha} e^{\frac{\beta}{x^2-1}}$ lorsque x tend vers $(-1)^+$ ou vers 1^-.

4) Calculer h' sur $]-1,1[$ et en déduire que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$. On pourra notamment réécrire le quotient $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ différemment et utiliser la question précédente.

5) Dresser le tableau de variation de h sur $[-1,1]$. En déduire que h admet un unique point fixe sur $[-1,1]$ que l'on notera ℓ.

6) Calculer h'' sur $]-1,1[$, puis étudier le signe de h''.

7) Déterminer la plus petite valeur $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [-1,1] \quad |h'(x)| \leq k$. On admettra que $k < 1$ sans chercher à en faire la preuve.

8) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = h(u_n)$. On rappelle que ℓ est l'unique point fixe de h, déterminé en question **5)**.

  a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$

  b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 : Une variante du TAF

Soit a et b deux réels fixés tels que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, trois fois dérivable sur $]a,b[$. On souhaite prouver que :

$$\exists c \in]a,b[\quad f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(c)$$

Pour cela, on considère la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right] \quad \varphi(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + x\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 2xf'\left(\frac{a+b}{2}\right) - Kx^3$$

où K est choisi de façon à ce que $\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$.

1) Justifier que φ est bien définie sur $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$.

2) Déterminer la constante K.

3) Prouver qu'il existe $c_1 \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

4) Prouver qu'il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $\varphi''(c_2) = 0$.

5) Prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f''\left(\frac{a+b}{2} + c_2\right) - f''\left(\frac{a+b}{2} - c_2\right) = 2c_2 f^{(3)}(c)$$

6) En déduire le résultat.

Exercice 4 : Régularité d'une fonction convexe

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $a \in \mathring{I}$, i.e. a est un point de I qui n'est pas égal à une borne de I. On note τ_a le taux d'accroissement de f en a, qui est une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On admet que, comme f est convexe, l'application τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

1) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en a.

2) Peut-on affirmer que f est dérivable sur $\mathring{I}$?

3) Montrer que f est continue en a.

4) Peut-on affirmer que f est continue sur I ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 5 : Relations binaires

Soit E un ensemble. On dénote $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M} \qquad \exists Z \in \mathcal{M} \qquad Z \subset X \cap Y \qquad (\star)$$

On remarque que $\mathcal{M} = \{E\}$ et $\mathcal{M} = \{\varnothing\}$ vérifient $(\star)$, mais $\mathcal{M}$ peut a priori être différent de $\{E\}$ et $\{\varnothing\}$.

1) On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \qquad A\mathcal{R}B \iff \exists X \in \mathcal{M} \quad A \cap X = B \cap X$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Étant donné $A \in \mathscr{P}(E)$, on note $\hat{A}$ la classe d'équivalence de A selon $\mathcal{R}$.

a) Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ lorsque $\mathcal{M} = \{E\}$, puis lorsque $\mathcal{M} = \{\varnothing\}$.

b) Montrer que si $A \in \hat{E}$ et $B \in \hat{E}$, alors $A \cap B \in \hat{E}$.

c) On définit la relation $\mathcal{S}$ par

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \qquad A\mathcal{S}B \iff \exists Y \in \hat{E} \quad A \cap Y = B \cap Y$$

Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a $A\mathcal{R}B \iff A\mathcal{S}B$.

Bonne année $(20 + 25)^2$